

А. А. Иванова, О. С. Ростовщикова, В. Б. Пономарев
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
v.b.ponomarev@urfu.ru

ПОГРЕШНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ СОПРОТИВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИХСЯ ЧАСТИЦ В ГАЗОВОЙ СРЕДЕ

Проведено исследование погрешностей вычисления аэродинамического сопротивления твердой сферической частицы в газовом потоке наиболее известными аппроксимациями кривой Рэлея. В ходе работы оптимизировались эмпирические коэффициенты аппроксимаций по наименьшим относительным погрешностям. В результате предложено математическое описание кривой Рэлея со средним относительным отклонением в переходной области чисел Рейнольдса не более 1 %.

Ключевые слова: относительная погрешность; аппроксимация; коэффициент сопротивления; кривая Рэлея; число Рейнольдса

A. A. Ivanova, O. S. Rostovshchikova, V. B. Ponomarev
Ural Federal University, Ekaterinburg

INACCURACY IN CALCULATION OF COEFFICIENTS OF PARTICLES MOTION RESISTANCE IN A GAS MEDIUM

In the work the errors of calculation of aerodynamic resistance of solid spherical particle in gas flow are investigated by the most known approximations of Raleigh curve. In the course of the work, empirical approximation coefficients were optimized for the lowest relative errors. As a result, a mathematical description of the Raleigh curve with an average relative deviation in the transition region of Reynolds numbers of not more than 1 % is proposed.

Keywords: relative error; approximation; Resistance coefficient; Raleigh curve; Reynolds Number

Оптимизация технологий гравитационного обогащения и пневматического транспортирования минерального сырья основана

на математическом моделировании двухфазных процессов с учетом коэффициентов аэродинамического сопротивления частиц. Исследования в этом направлении сводятся к стандартной кривой Рэлея для одиночной твердой сферы, движущейся с постоянной скоростью в неподвижной изотермической жидкости [1].

При числах Рейнольдса $Re \ll 1$ (ламинарный режим течения) коэффициент сопротивления твердой сферической частицы определяется формулой Стокса [2]

$$\lambda = \frac{24}{Re}. \quad (1)$$

При числах Re больше 0,1 и началом образования спутной струи за частицей, Осин предложил зависимость [3]

$$\lambda = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3Re}{16} \right). \quad (2)$$

Образование вихревых колец при $Re = 30 \dots 300$ – зона Аллена, описывается одноименным уравнением [3]

$$\lambda = \frac{10}{\sqrt{Re}}. \quad (3)$$

При $Re = 700 \dots 3 \cdot 10^5$ (турбулентный режим) коэффициент сопротивления примерно постоянен (для твердой сферы $\lambda = 0,44$).

При $Re > 3 \cdot 10^5$ коэффициент сопротивления резко уменьшается (эффект Эйфеля), что характеризует явление кризиса сопротивления.

Для описания переходной области при $Re = 0,1 \dots 700$ предложен ряд аппроксимаций кривой Рэлея. Наиболее известные из них:

– формула Клячко-Мазина [2]:

$$\lambda = \frac{24}{Re} \left(1 + 0,17 Re^{\frac{2}{3}} \right) = \frac{24}{Re} + \frac{4}{\sqrt[3]{Re}}; \quad (4)$$

– формула Аэрова-Тодеса [2]:

$$\lambda = \left(0,325 + \sqrt{0,124 + \frac{24}{Re}} \right)^2; \quad (5)$$

– формула Адамова [4]:

$$\lambda = \frac{24}{Re} \left(1 + 0,065 Re^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}; \quad (6)$$

– формула Шиллера-Неймана [1]:

$$\lambda = \frac{24}{Re} (1 + 0,15 Re^{0,687}) \quad (7)$$

При нанесении на график Рэлея [6] вышеперечисленных аппроксимаций можно заметить, что каждая из них «закрывает» лишь часть кривой Рэлея, только формулы Аэрова и Адамова с относительной погрешностью около 10 % могут использоваться в диапазоне чисел Рейнольдса от 0,1 до 200000. Наименьшую относительную погрешность до 3 % в переходной области показывает аппроксимация Шиллера-Неймана.

Был проведен компьютерный поиск оптимальных значений эмпирических коэффициентов представленных аппроксимаций с учетом минимизации относительной погрешности математического описания кривой Рэлея. В таблице предлагаются модифицированные формулы и относительные погрешности вычислений до и после оптимизации для конкретного диапазона чисел Рейнольдса.

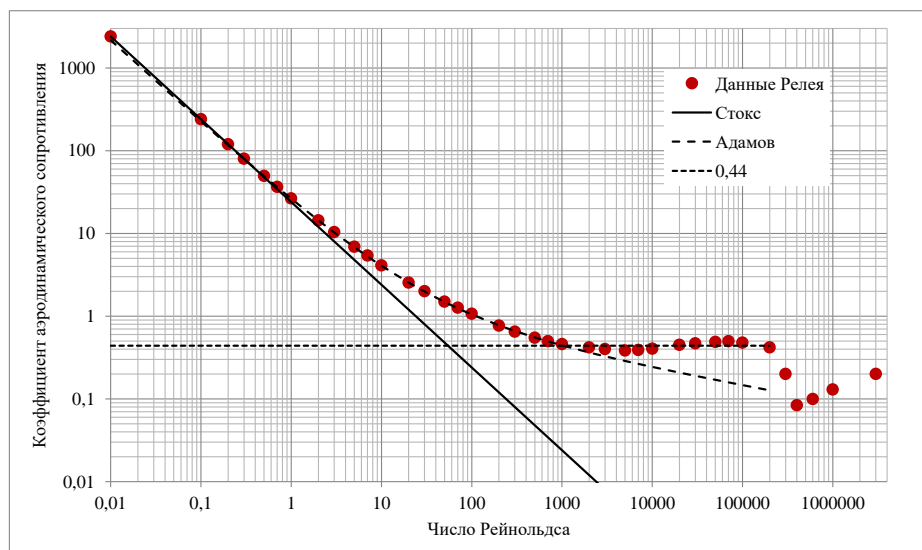
Современные компьютерные численные методы поиска оптимального решения (например, встроенная процедура в таблице EXCEL) позволяют подобрать коэффициенты уравнений и снизить погрешности аппроксимаций. В таблице предлагаются модифицированные формулы и относительные погрешности вычислений до и после оптимизации.

Погрешности аппроксимации кривой Рэлея

Название	Модернизированная формула	Re	$\Delta_{\text{нач}},$ %	$\Delta_{\text{кон}},$ %
Осин	$\lambda = \frac{24}{Re} + 0,8$	0,01–0,7	4,0	1,2
Аллен	$\lambda = \frac{10,9}{\sqrt{Re}}$	30–300	7,7	1,8
Клячко-Мазин	$\lambda = \frac{24}{Re} + \frac{3,34}{Re^{0,3}}$	0,01–1000	4,3	2,3
Адамов	$\lambda = \frac{24}{Re} (0,92 + 0,147 Re^{0,55})^{1,45}$	0,3–1000	8,9	1,0
Аэров-Тодес	$\lambda = \left(0,5 + \left(0,0084 + \frac{24}{Re} \right)^{0,485} \right)^2$	0,2–200000	9,4	1,7
Шиллер-Нейман	$\lambda = \frac{24}{Re} (0,95 + 0,156 Re^{0,676})$	0,01–000	3,0	1,2

Таким образом, для описания графика Рэлея в диапазоне чисел $Re = 0,01–200000$ (рисунок) со средней относительной погрешностью менее 1 %, можно предложить следующую зависимость:

$$\lambda = \begin{cases} 24/Re & Re \leq 0,3 \\ \frac{24}{Re} (0,92 + 0,147 Re^{0,55})^{1,45} & Re = 0,3 - 1000 \\ 0,44 & Re = 1000 - 200000 \end{cases} \quad (9)$$



Кусочная аппроксимации кривой Рэлея

Полученные новые формулы для коэффициента динамического сопротивления твердых частиц позволяют повысить точность математических моделей движения двухфазных потоков, оптимизировать технологические параметры и снизить энергозатраты на проведение процессов воздушной классификации и пневматического транспорта порошков.

Список использованных источников

1. Келбалиев, Г. И. Коэффициенты сопротивления твердых частиц, капель и пузырей различной формы / Г. И. Келбалиев // Теоретические основы химической технологии. 2011. Т. 45, № 3. С. 264–283.
2. Архипов, В. А. Движение частиц дисперсной фазы в несущей среде : учеб. пособие / В. А. Архипов, А. С. Усанина. Томск : Изд. Дом ТГУ, 2014. 252 с.
3. Страус, В. Промышленная очистка газов : пер. с англ. / В. Страус. М. : Химия, 1981. 616 с.
4. Адамов, Г. А. Общая формула сопротивления при относительном движении частиц и среды / Г. А. Адамов // Известия АН СССР : Серия Metallургия и топливо. 1961. № 6. С. 317–327.
5. Медников, Е. П. Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей / Е. П. Медников. М. : Наука, 1981. 174 с.
6. Разумов, И. М. Псевдооживление и пневмотранспорт сыпучих материалов / И. М. Разумов: изд. второе, доп. и пер. М. : Химия, 1972. 240 с.